

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* В многочисленных областях знаний, где применимы математические методы, например в медицине, физике, астрономии и геофизике, применяются обратные задачи. Также стоит упомянуть задачи выяснения внутренней структуры всевозможных объектов с помощью их зондирования, где численные методы – порой единственный способ изучить объект изнутри и получить его внутреннюю структуру. Такое широкое применение обусловлено возможностью описания различных важных свойств исследуемых объектов и сред, таких как скорость распространения волны, плотность, диэлектрическая и магнитная проницаемость, параметры упругости, проводимость, а также местоположение и свойства неоднородностей в области недоступности. Сложно недооценить важность и актуальность исследований в таких областях, где проникновение внутрь или опасно, или слишком трудоемко, или вообще невозможно.

*Материалы и методы.* Используя полученные значения измерения поля во внешних точках (точках наблюдения), решается линейное интегральное уравнение первого рода и производится вычисление неоднородности по явной формуле. Интегральное уравнение решаем с помощью метода коллокации.

*Результаты.* Исследована обратная задача восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в свободном пространстве. Для решения исследуемой задачи используется смоделированное дифракционное поле во внешних точках, которое также можно получить экспериментальным путем. Далее исследуется восстановление внутренней структуры тела.

*Выводы.* Решение поставленной задачи методом, который используется в работе, позволяет найти решение с необходимой точностью и при этом работать с расчетными сетками больших размеров. Одним из главных достоинств метода является возможность выявления неоднородностей тела, где их количество более 1000.

**Ключевые слова:** задача дифракции, обратная задача, неоднородность тела.

М. Ю. Медведик, Р. О. Евстигнеев, Е. А. Гундарев

## THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE INHOMOGENEITY PARAMETERS OF BODIES LOCATED IN FREE SPACE

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 1.894.2017/4.6) и Фонда содействия инновациям по программе «У.М.Н.И.К.» (договор № 13085ГУ/2018 от 14.05.2018).

© Медведик М. Ю., Евстигнеев Р. О., Гундарев Е. А., 2018. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

**Abstract.**

*Background.* Inverse problems are applied in many areas of knowledge electrodynamic, for example, in medicine, physics, astronomy and geophysics, and they apply for identification structure of the different bodies. This is due to the fact that the solutions of inverse problems describe various important properties of the media under study, such as the wave propagation velocity, density, dielectric and magnetic permeability, elasticity parameters, conductivity, and the location and properties of inhomogeneities in the region of inaccessibility. Such information is very important for researchers in areas where penetration is either dangerous or even impossible.

*Materials and methods.* Using the obtained values of the field measurement at external points (observation points), a linear integral equation of the first kind is solved and the inhomogeneity is calculated from the explicit formula. The integral equation is solved by the collocation method.

*Results.* The inverse problem of reconstructing the dielectric constant of an inhomogeneous body in free space is investigated. A diffraction field is obtained at observation points, which is necessary for the further solution of the problem under study, which can also be obtained experimentally. Further we arrive at the determination of inhomogeneities inside the body.

*Conclusions.* When using this method, the choice of the initial approximation is not required. Besides, this method allows you to work with large computed grids and identify more than 1000 heterogeneities. The proposed method also allows one to reconstruct the dielectric constant of an anisotropic body and a body with complex dielectric permittivity.

**Keywords:** diffraction problem, inverse problem, body's inhomogeneity.

**Введение**

В современном мире существует множество задач электродинамики, решение которых актуально во многих областях науки. Одной из таких задач является задача поиска неоднородности внутри тела. Данная задача является обратной и встречается во многих важнейших областях, например: в дефектоскопии, в задачах идентификации объектов и при диагностике рака молочной железы. Большинство из существующих методов диагностики являются дорогими и небезопасными. Одним из перспективных направлений в диагностике рака молочной железы является метод сверхвысокочастотной томографии [1]. Данное направление требует развития эффективных численных методов, алгоритмов. Мы предлагаем неинвазивный метод, который позволяет определять на неоднородность внутри тела, не требуя точного начального приближения.

Данный метод может быть применен в других областях науки и техники, например, для идентификации взрывчатых и наркотических веществ, в дефектоскопии и т.д. [2–5]. Задача решается в два этапа. На первом этапе получаем значения поля во внешних точках (точках наблюдения). Используя полученные значения, решаем линейное интегральное уравнение первого рода и производим вычисление неоднородности по явной формуле. Такое разделение позволяет избавиться от нелинейности исходной задачи и необходимости выбора начальных приближений. Метод позволяет определить геометрию фигуры. В работе рассматривается метод, который позволяет решать задачу на больших расчетных сетках.

### 1. Постановка задачи

Перейдем к изучению задачи дифракции электромагнитного поля на теле  $Q$ . Будем предполагать, что рассматриваемое тело  $Q \in R^3$  расположено в свободном пространстве с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$  (рис. 1), а его диэлектрическая проницаемость описывается функцией  $\varepsilon(x)$ . За пределами тела диэлектрическая проницаемость является константой  $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость свободного пространства. Источник поля  $J_E^0 \in R^3 / \bar{Q}$  расположен вне  $\bar{Q}$ .

Получим падающее поле.

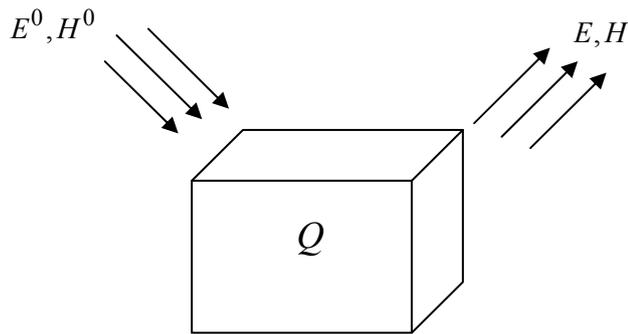


Рис. 1. Дифракция электромагнитных волн на неоднородном теле

С помощью системы уравнений Максвелла получим описание поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{J}_E^0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}_E^0$  – ток [1].

Потребуем выполнения краевых условий на границе тела для  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$

$$[\mathbf{E}_\tau] |_{\partial \bar{Q}} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau] |_{\partial \bar{Q}} = 0, \quad (2)$$

где  $[\cdot]$  – скачок предельных значений.

Предполагаем выполнение краевых условий излучения на бесконечности для полей  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} - ik\mathbf{E} \right) &= o\left( \frac{1}{r} \right), \\ \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} - ik\mathbf{H} \right) &= o\left( \frac{1}{r} \right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Исследуемая задача (1)–(3) является векторной. Получим объемное интегродифференциальное уравнение [1] вида

$$\begin{aligned} & \xi(x)\mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q G(r) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right)^{-1} \mathbf{E}(y) \right) dy - \\ & - \text{grad div} \int_Q G(r) \left( \left( \frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right)^{-1} \mathbf{E}(y) \right) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $G(x, y)$  – функция следующего вида:

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

здесь  $\mathbf{E}^0(x)$  – падающее поле;  $\mathbf{J}(x)$  – токи поляризации внутри тела,

$$\xi(x) = \left( \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right)^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{J}(x) = \xi(x)\mathbf{E}(x).$$

Необходимо восстановить электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2^3(Q) = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q)$ . Ядро уравнения (4) является слабосингулярным [2] и имеет особенность. Для задачи (1)–(2) справедливо утверждение о единственности [3].

## 2. Численный метод

Получим решение уравнения  $A\varphi = f$  ( $\varphi, f \in X$ ) в гильбертовом пространстве  $X$  методом коллокации. Приближенное решение  $\varphi_n \in X_n$  определяется из уравнения  $P_n A \varphi_n = P_n f$ . Здесь  $\varphi_n \in X_n$  ( $X_n$  есть  $n$ -мерное подпространство пространства  $X$ ),  $P_n : X \rightarrow X_n$  – оператор проектирования на конечномерное подпространство, который определяется ниже.

Разобьем область  $Q$  на элементарные подобласти  $Q_i$  с кусочно-гладкими границами  $\partial Q_i$  так, чтобы выполнялись условия  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\bar{Q} = \bigcup_i \bar{Q}_i$ . Выберем в каждой подобласти  $Q_i$  точку (узел) коллокации

$x^i$ . Рассмотрим базисные функции  $v_i = \begin{cases} 1, & x \in Q_i \\ 0, & x \notin Q_i \end{cases}$ . Пусть подпространства  $X_n$

являются линейными оболочками базисных функций:  $X_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации:

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0. \quad (5)$$

Проектор  $P_n : X \rightarrow X_n$  определим так:  $(P_n \varphi)(x) = \varphi(x^i)$ ,  $x \in Q_i$ .

Уравнение  $P_n A \varphi_n = P_n f$  эквивалентно следующему:

$$(A\varphi_n)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Приближенное решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций:  $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$ . Получим систему линейных алгебраических уравнений, подставив полученное представление в схему метода коллокации. Задача сводится к отысканию неизвестных коэффициентов  $c_k$ :

$$\sum_{k=1}^n c_k (Av_k)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Справедливо следующее определение.

**Определение 1.** Метод коллокации будем называть сходящимся для оператора  $A$  и  $f \in \text{Im } A$ , если существует число  $N$  такое, что приближенные уравнения  $(A\varphi_n)(x^j) = f(x^j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , имеют единственное решение  $\varphi_n \in X_n$  для всех  $n \geq N$  и если эти решения сходятся  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  при  $n \rightarrow \infty$  к единственному решению  $\varphi$  уравнения  $A\varphi = f$ .

Рассмотрим тело  $Q$ , являющееся параллелепипедом  $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$ . Произведем дискретизацию задачи. Разобьем тело  $Q$  на элементарные параллелепипеды «конечные элементы»:

$$P_{klm}^1 = \left\{ x : x_{1,k-1} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n} l, \quad x_{3,k} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n} m,$$

где  $k, l, m = 0, \dots, n-1$ . Носителем для данной задачи будет являться один из конечных элементов. Каждый носитель ориентирован вдоль одной из координатных осей.

### 3. Решение задачи на параллелепипеде

Пусть тело  $\Pi = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$  является прямоугольным параллелепипедом. Построим на  $\Pi$  равномерную сетку, т.е. разобьем  $\Pi$  на элементарные подобласти  $\Pi_i$  с кусочно-гладкими границами  $\partial\Pi_i$  так, чтобы выполнялись условия  $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\overline{\Pi} = \bigcup_i \overline{\Pi_i}$  (рис. 2).

Чтобы найти решение задачи, применим метод коллокации. Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов  $a_k, b_k, c_k$  удобно представить в блочной форме:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right),$$

элементы колонок  $B_k$  и матриц  $A_{kl}$  определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i), \tag{7}$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} v_j^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) v_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) v_i^l(y) dy, \tag{8}$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 0, \dots, N-1.$$

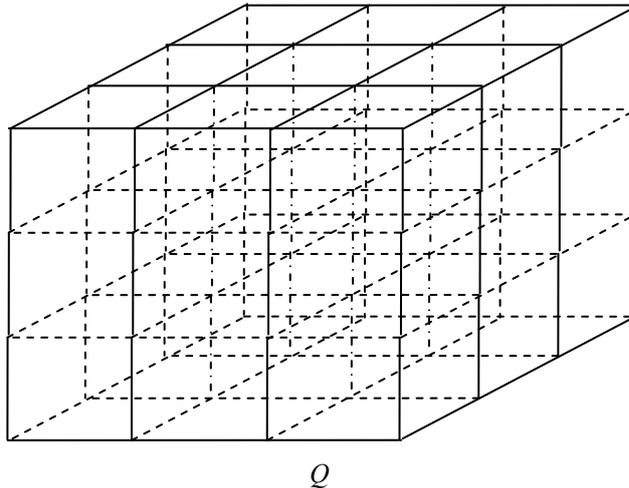


Рис. 2. Тело  $Q$ , разбитое на элементарные параллелепипеды

Здесь координаты точки коллокации определяются следующим образом:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 1/2)h_3.$$

Предложенный метод реализован для решения задачи дифракции. Представлены результаты решения интегрального уравнения на кубе с разбиением сетки  $12 \times 12 \times 12$ . Волна падает вдоль оси  $OX$ . Правая часть матричного уравнения равна единице для первой компоненты и нулю для всех остальных. На рис. 3 представлены значения модуля первой компоненты электрического поля на первом, четвертом, восьмом и двенадцатом слоях соответственно.

#### 4. Обратная задача дифракции

Перейдем к рассмотрению задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела. Пусть тело расположено в свободном пространстве. Задача является обратной и имеет практическое значение. Рассматриваемая задача использует измеренные параметры поля вне тела, которые используются для нахождения диэлектрической проницаемости тела. Для этого нужно выбрать такие точки наблюдения  $(x_c)$ , которые находятся за пределами тела.

Дискретизация задачи выполняется следующим образом. Будем предполагать, что тело  $Q$  содержится в параллелепипеде  $Q \subset \Pi$ :

$$\Pi = \{a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$$

$$0 \leq a_1 < a_2 \leq a, 0 \leq b_1 < b_2 \leq b, 0 \leq c_1 < c_2 \leq c.$$

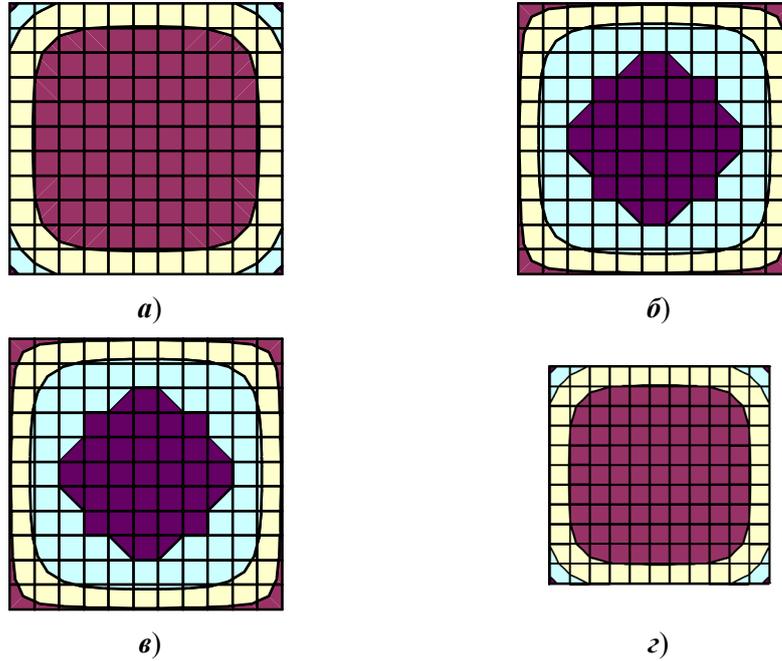


Рис. 3. Решение задачи на первом (а), четвертом (б), восьмом (в) и двенадцатом (z) слоях куба; сетка  $12 \times 12 \times 12$ ,  $x_i = 1,5$ ,  $k = 1,0$ , волна  $(1,0,0)$

Выберем равномерную прямоугольную сетку в  $\Pi$ , имеющую размер  $N_1 \times N_2 \times N_3$  и образованную параллелепипедами

$$\Pi_{klm} = \left\{ x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\}$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

где  $k = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $l = 0, \dots, N_2 - 1$ ,  $m = 0, \dots, N_3 - 1$ .

Пусть тело  $Q$  состоит из  $q$  подобластей  $Q_j$  таких, что  $Q = \bigcup_j Q_j$ ,

$Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$ . Кроме того, пусть подобласти  $Q_j$  состоят из объединения элементарных параллелепипедов (ячеек) сетки  $Q_j = \bigcup_l \Pi_l$ .

Внутри каждой ячейки будем считать диэлектрическую проницаемость равной константе. Падающее поле генерируется точечным источником, который расположен за пределами тела в точке  $y_0 = (y_0^1, y_0^2, y_0^3)$  и имеет вид

$\mathbf{E}_1^0(x) = \frac{e^{ik|x-y_0|}}{|x-y_0|}$ ,  $\mathbf{E}_2^0 = \mathbf{E}_3^0 = 0$ . Окружим тело  $Q$  точками наблюдения (рис. 4), расположенными на некотором удалении от тела  $Q$ . Будем располагать их в некотором объемном сегменте за пределами тела.

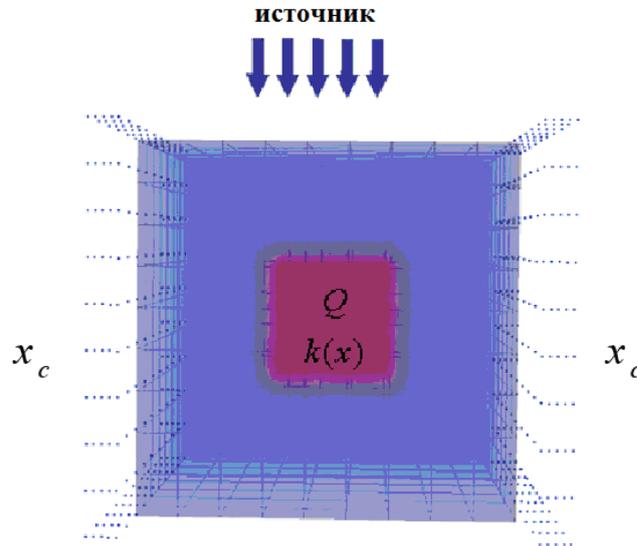


Рис. 4. Вариант расположения точек наблюдения  $x_c$

В реальных условиях значение поля в точках наблюдения измеряется при помощи различных устройств. Будем моделировать поведение поля в точках наблюдения. Получим дифракционное поле в точках наблюдения. Для этого решим прямую задачу дифракции (1)–(3) и определим числовые характеристики поля  $\mathbf{E}(x)$  внутри тела  $Q$ , решая следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left( \frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left( \frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем значение поля во внешних точках  $x_c$ , подставив полученные значения поля  $\mathbf{E}(x)$  в формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_c) = & \mathbf{E}^0(x_c) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x_c \notin Q, \end{aligned} \quad (10)$$

затем решим его относительно неизвестной функции

$$\mathbf{J}(y) = \left[ \frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y). \quad (11)$$

Получив дифракционное поле в точках наблюдения [6], которое необходимо для решения исследуемой задачи, переходим ко второму этапу решения задачи, который заключается в нахождении неоднородности тела. Для этого решаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x_c)}{\left( \frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)} - \mathbf{E}^0(x_c) = k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x_c \notin Q. \end{aligned} \quad (12)$$

Сложность решения данного уравнения связана с тем, что оно является уравнением первого рода. Обратная задача восстановления диэлектрической проницаемости тел сводится к решению уравнения (12). Различные методы регуляризации или предобуславливания значительно повышают эффективность решения уравнения.

Из уравнения (12) находим  $\mathbf{J}(x)$  и определяем диэлектрическую проницаемость тела  $\hat{\varepsilon}(y)$  в каждой ячейке, используя уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x)}{\left( \frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)} - \left( k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \right. \\ \left. + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right) = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве примера приведем визуализацию результатов определения диэлектрической проницаемости тела в свободном пространстве. Размеры тела равны,  $a = 0,3$  м,  $b = 0,3$  м,  $c = 0,3$  м,  $k_0 = 2$  м<sup>-1</sup>. Размер расчетной сетки  $12 \times 12 \times 12$ .

На рис. 5 представлено исходное значение модуля диэлектрической проницаемости тела, полученное в результате моделирования.

На рис. 6 представлено восстановленное значение модуля диэлектрической проницаемости тела.

Максимум модуля разности между исходным и восстановленным значением диэлектрической проницаемости не превышает  $10^{-5}$ . Для восстановления данных неоднородностей тела были использованы исходные данные без внесения погрешности.

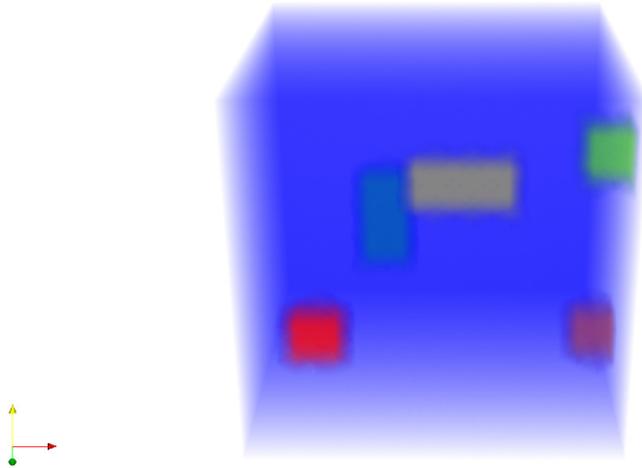


Рис. 5. Исходное значение модуля диэлектрической проницаемости тела

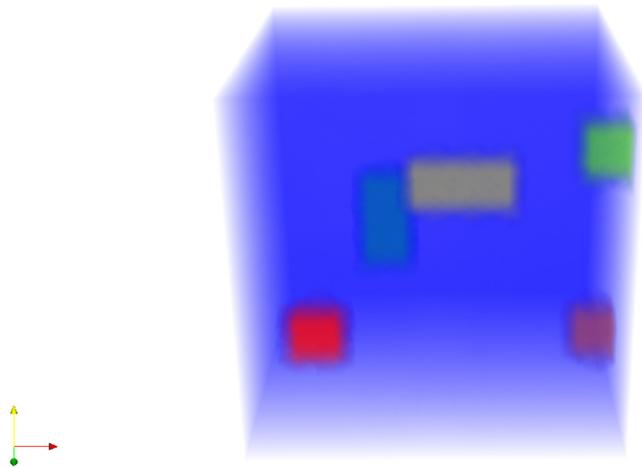


Рис. 6. Восстановленное значение модуля диэлектрической проницаемости тела

### Заключение

В работе рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны в свободном пространстве. Результаты решения задачи показали возможность моделирования поля внутри тела и в точках наблюдения, что позволяет проводить эксперимент при отсутствии измерительного оборудования. Данная задача из интегродифференциальной постановки сводится к линейному виду, что позволило решить задачу в два шага. На первом шаге решалось уравнение первого рода, для которого не требуется задание начальных приближений, необходимых для большинства известных численных методов. На втором шаге, велся пересчет коэффициентов проводимости и проницаемости исследуемой структуры. Применяя данный алгоритм возможно восстановить не только вещественную, но мнимую часть задачи. Представленные в работе результаты являются модулем восстановленного и изначального значений. Как можно заметить, задача имеет хорошую восстанавливаемость и может быть применена на практике.

**Библиографический список**

1. Fast 3-D tomographic microwave imaging for breast cancer detection / T. M. Grzegorzyc, P. M. Meaney, P. A. Kaufman, Roberta M. diFlorio-Alexander, K. D. Paulsen // *IEEE Transactions on medical imaging*. – 2012. – Vol. 3, № 8. – P. 1584–1592.
2. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – Москва : Радио и связь, 1998.
3. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2008. – № 3. – С. 39–54.
4. **Медведик, М. Ю.** Применение субиерархического метода в задачах электродинамики / М. Ю. Медведик // *Вычислительные методы и программирование*. – 2012. – Т. 13. – С. 87–97.
5. **Медведик, М. Ю.** Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 76 с.
6. **Смирнов, Ю. Г.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел : монография / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак. – Москва : РУСАЙНС, 2016. – 226 с.

**References**

1. Grzegorzyc T. M., Meaney P. M., Kaufman P. A., diFlorio-Alexander R. M., Paulsen K. D. *IEEE Transactions on medical imaging*. 2012, vol. 3, no. 8, pp. 1584–1592.
2. Samokhin A. B. *Integral'nyye uravneniya i iteratsionnyye metody v elektromagnitnom rasseyanii* [Integral equations and iteration methods at electromagnetic scattering]. Moscow: Radio i svyaz', 1998. [In Russian]
3. Smirnov YU. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2008, no. 3, pp. 39–54. [In Russian]
4. Medvedik M. YU. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming]. 2012, vol. 13, pp. 87–97. [In Russian]
5. Medvedik M. YU., Smirnov YU. G. *Obratnyye zadachi vosstanovleniya dielektricheskoy pronitsayemosti neodnorodnogo tela v volnovode* [Inverse problems of inhomogeneous body's dielectric permittivity restoration in a waveguide]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, 76 p. [In Russian]
6. Smirnov YU. G., TSupak A. A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel: monografiya* [Mathematical theory of acoustic and electromagnetic wave diffraction over a system of screens and inhomogeneous bodies: monograph]. Moscow: RUSAYNS, 2016, 226 p. [In Russian]

---

**Медведик Михаил Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования,  
Пензенский государственный  
университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

**Medvedik Mikhail Yur'evich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling, Penza State  
University (40 Krasnaya street,  
Penza, Russia)

**Евстигнеев Роман Олегович**

аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: Roman\_vezar@mail.ru

**Evstigneev Roman Olegovich**

Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Гундарев Евгений Андреевич**

студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: psu.gun@mail.ru

**Gundarev Evgeniy Andreevich**

Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 519.634, 517.3

**Медведик, М. Ю.**

**Обратная задача определения параметров неоднородности тел, расположенных в свободном пространстве** М. Ю. Медведик, Р. О. Евстигнеев, Е. А. Гундарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 4 (48). – С. 50–61. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-4-5.